**Фильтрация состояний дифференциальных стохастических систем**

**Оптимальная фильтрация состояний нелинейных стохастических дифференциальных систем наблюдения**

**Определение 1**. Система стохастических дифференциальных уравнений

называется *стохастической дифференциальной системой наблюдения.* Здесь

* (1) - уравнение динамики,
* (2) - модель наблюдений,
* – ненаблюдаемое состояние системы; – известные детерминированные функции (дискретных сноса и диффузии в динамике); – мартингал, характеризующий случайные возмущения в динамике системы; – начальное условие;
* – процесс доступных наблюдений; – известные детерминированные функции (аддитивного полезного сигнала и интенсивности шумов); – мартингал, характеризующий случайные ошибки наблюдений.

Для систем наблюдения (1), (2) рассматриваются задачи оценивания ненаблюдаемого состояния *X* по имеющейся совокупности наблюдений *Y*.

Пусть

– некоторая оценка (произвольная нелинейная функция наблюдений). Если *s < t*, то оценка называется *экстраполяционной* (или *прогнозной*), если *s = t,* то оценка называется оценкой фильтрации, если *s > t*, то оценка называется *интерполяционной* (или *оценкой сглаживания*).

В данном курсе мы будем рассматривать только задачи фильтрации состояний стохастических динамических систем.

Если оценка фильтрации имеет вид

то она называется *линейной* оценкой.

Показателем качества оценивания является СК-критерий

– средний квадрат ошибки оценки фильтрации.

**Определение 2**. Оценка называется (*абсолютно*) *оптимальной оценкой фильтрации,* если

где – множество функций наблюдений с конечным 2-м моментом.

Если

где - множество аффинных функций наблюдений, то оценка называется *оптимальной линейной оценкой фильтрации*.

Оценка далее в изложении называется *тривиальной*. Название объясняется, во-первых, тем, что безусловное математическое ожидание совпадает с условным относительно тривиальной сигма-алгебры, а, во-вторых, тривиальным использованием имеющихся наблюдений (попросту неиспользованием).

**Замечание 1.** Решение задач фильтрации состояний стохастических дифференциальных систем наблюдения значительно сложнее, чем решение аналогичных задач в случае систем наблюдения с дискретным временем. Во-первых, решение стохастической дифференциальной системы наблюдения (1), (2) существует не всегда. Во-вторых, даже в случае, когда решение существует, оно не всегда является гильбертовым случайным процессом (т.е. процессом с конечным моментом второго порядка), поэтому задачи оптимальной фильтрации (5) и (5’) ставить для таких систем некорректно. В-третьих, лишь для относительно узкого класса систем наблюдения задача фильтрации выражается с помощью решения уравнений Закаи или Кушнера-Стратоновича, относящихся к стохастическим интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных. Очевидно, что аналитических решений для уравнений подобного вида нет. Оценка оптимальной фильтрации выражается через решение замкнутой конечномерной системы уравнений лишь для крайне узкого класса систем наблюдения, которые будут представлены ниже.

**Замечание 2.** Очевидно, что абсолютно оптимальная оценка обладает большей точностью, чем оптимальная линейная оценка. Однако, преимуществами линейной оценки может быть более простой алгоритм ее вычисления и пр.

**Замечание 3**. Оценка фильтрации является абсолютно оптимальной тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

для произвольной функции такой, что Теоретически оптимальную оценку можно искать, исходя из условий (6, 7). Условие (6) – условие несмещенности оценки, условие (7) – условие ортогональности ошибки фильтрации любому преобразованию имеющихся наблюдений.

**Замечание 4**. Оценка фильтрации является абсолютно оптимальной тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

для произвольного линейного преобразования наблюдений: такой, что Теоретически оптимальную оценку можно искать, исходя из условий (8, 9). Условие (8) – условие несмещенности оценки, условие (9) – условие ортогональности ошибки фильтрации любому линейному преобразованию имеющихся наблюдений.

**Фильтр Калмана-Бьюси.**

В некоторых частных случаях решение задачи оптимальной фильтрации имеет компактный вид, а алгоритм вычисления оптимальной оценки достаточно прост для реализации. В частном случае, когда совместное распределение оцениваемого состояния и доступных наблюдений является гауссовским, искомое условное математическое ожидание является аффинной оценкой наблюдений, вычисляемой с помощью фильтра Калмана-Бьюси.

Рассмотрим частный случай системы наблюдения (1), (2) – линейный гауссовский

.

Относительно системы наблюдения сделаны следующие предположения.

1. Процессы предполагаются стандартными винеровскими процессами.
2. , и независимы в совокупности.
3. Шумы в наблюдениях не вырождены, т.е.

**Теорема 1**. (Абсолютно) оптимальная оценка состояния линейной гауссовской системы наблюдения и матрица ковариации ее ошибки является решением дифференциальной системы

с начальными условиями

**Следствие 1**. Если (11), (12) – линейная *негауссовская* система наблюдения с теми же моментными характеристиками, то оценка фильтрации Калмана-Бьюси (13) – (16) определяет наилучшую *линейную* оценку фильтрации.

**Замечание 5**. Замечательным свойством алгоритма фильтрации Калмана-Бьюси является возможность одновременного вычисления оценки фильтрации и показателя ее качества – ковариационной матрицы ее ошибки . Эта возможность обеспечивается свойством гауссовского распределения и теоремой о нормальной корреляции: в гауссовском случае условная ковариация совпадает с безусловной.

**Задача 1 (для самостоятельного решения)**. Для оценки фильтрации Калмана-Бьюси проверить выполнение условий (8) и (9).

**Фильтр Вонэма.**

Случай линейных гауссовских систем является не единственным, в котором уравнения абсолютно оптимальной фильтрации имеют простой вид и легко реализуются на компьютере. Задача фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным зашумленным наблюдениям также относится к этому классу.

Рассмотрим следующую дифференциальную стохастическую систему наблюдения:

Здесь

* – ненаблюдаемое состояние системы – марковский скачкообразный процесс с начальным условием и матрицей интенсивностей переходов ; – мартингал (см. мартингальное разложение (1.9) в лекции «Мартингальное представление марковского скачкообразного процесса с конечным множеством состояний»);
* – процесс доступных наблюдений; – стандартный винеровский процесс, характеризующий случайные ошибки наблюдений.

**Теорема 2**. (Абсолютно) оптимальная оценка фильтрации состояния МСП (17) по наблюдениям (18) является решением дифференциальной системы

с начальным условием

**Замечание 6**. В силу того, что система наблюдения (17), (18) – линейная негауссовская, фильтр Калмана-Бьюси, примененный к (17), (18) дает оптимальную линейную оценку состояния МСП по имеющимся наблюдениям, а также (безусловную) ковариационную матрицу ошибки оценки фильтрации.

**Замечание 7.** Условная ковариационная матрица ошибки оценки фильтрации Вонэма вычисляется просто по формуле (20), но безусловную ковариационную матрицу ошибки оценки фильтрации аналитически вычислить не удается, приходится довольствоваться только ее оценками, полученными методами Монте-Карло.

**Задача 2 (для самостоятельного решения)**. Доказать, что абсолютно оптимальная и линейная оптимальная оценки удовлетворяют условию нормировки.